

Exponenciális és logaritmikus kifejezések

Szöveges feladatok

Kidolgozott feladatok

1. Egy új kórokozó által okozott első elhalálozást 2011-ben regisztrálták, akkor két haláleset következett be. 2012-ben már négyen hunytak el a betegség következtében, 2013-ban pedig 7-en. A statisztikai adatok gyorsuló ütemű növekedést mutatnak. Ha a folyamatot exponenciálisnak tételezzük fel, akkor a becslések alapján egy adott évben az $y = 2,2 \cdot 1,78^x$ képlet írja le a halálesetek számát, ahol x a 2011 óta eltelt évek számát jelöli. (Azaz a 2012-es adatot az $x = 1$ eset adja.)
 - a) A fenti képlet alapján becsüljük meg, hogy mennyi lesz a várható halálesetek száma 2030-ban!
 - b) Ha a helyzet nem javulna, így a képlet érvényben maradna, akkor melyik évben érné el a halálozások száma az 1 000 000-t?

Megoldás:

Tulajdonképpen egy exponenciális függvényt vizsgálunk, függvényértéket adunk meg, vagy annak ismeretében keressük vissza a változót.

- a)
- 2011-től 2030-ig 19 év telik el, így $x = 19$. Ekkor $y = 2,2 \cdot 1,78^{19} \approx 126009$, így ennyi lesz a várható halálestek száma 2030-ban.

- b)
- Most $y = 1000000$, azaz az $1000000 = 2,2 \cdot 1,78^x$ exponenciális egyenletet kell megoldanunk.

$1000000 = 2,2 \cdot 1,78^x$	Mindkét oldalt elosztjuk 2,2-del.
$454545,45 = 1,78^x$	Vegyük mindkét oldal logaritmusát.
$\lg 454545,45 = \lg 1,78^x$	A hatvány logaritmusára vonatkozó azonosság szerint.
$\lg 454545,45 = x \cdot \lg 1,78$	Ezek pedig géppel számolható értékek.
$5,6576 = x \cdot 0,2504$	Most pedig 0,2504-gyel osztunk.
$22,62 = x$	Ezt kerekíthetjük 23-ra.

Vagyis 2034-ben fogja elérni a halálozások száma az 1000000-t.

2. A Föld légkörében a nyomást (Pa-ban mérve) a magasság függvényében jó közelítéssel a $p(h) = 10^5 \cdot 0,88^h$ függvény adja meg, ahol h -t (a magasságot) km-ben mérjük. Milyen magasságban lenne a légköri nyomás közelítőleg 31648 Pa. (A választ egész km-re kerekítsük!)

Megoldás:

A h értékét keressük úgy, hogy a $p(h)$ érték adott: $31648 = 10^5 \cdot 0,88^h$.
Ismét egy exponenciális egyenletet kell megoldanunk.

$31648 = 10^5 \cdot 0,88^h$	Osztunk 10^5 -nel.
$0,31648 = 0,88^h$	Jöhet a logaritmus.
$\lg 0,31648 = \lg 0,88^h$	Ismét az azonosságra hivatkozunk.
$\lg 0,31648 = h \cdot \lg 0,88$	Számolunk a géppel.
$-0,4997 = h \cdot (-0,0555)$	Osztunk $-0,0555$ -tel.
$9 = h$	

Azaz 9 méter magasságban lesz a légköri nyomás közelítőleg 31648 Pa.

3. A pszichofizikai törvények szerint az emberi érzékelés nem lineáris, hanem logaritmikus kapcsolatban van az embert érő inger erősségével. A hangforrások hangosságát decibelben szokták megadni. Ha a hangforrás intenzitása egy adott helyen $x \frac{W}{m^2}$, akkor annak hangosságát $y = 120 + 10 \cdot \lg x$ decibelnek érezzük. (A fájdalomküszöb 130 decibel.)
- A pisztolylövés intenzitása 1 méterről $100 \frac{W}{m^2}$. Hány decibelnek érezzük a pisztolylövés hangosságát?
 - A légkalapács hangossága két méterről 100 decibel. Mekkora a hangforrás intenzitása?

Megoldás:

Ebben a feladatban az $y = 120 + 10 \cdot \lg x$ összefüggés használata lesz majd fontos, az x vagy az y ismeretében kell a másik paramétert meghatározni.

a)

Itt most $x = 100$, vagyis az $y = 120 + 10 \cdot \lg 100$ értéket kell kiszámolnunk.
Mivel $y = 120 + 10 \cdot \lg 100 = 120 + 10 \cdot 2 = 120 + 20 = 140$, így a pisztolylövés hangossága 1 méterről 140 decibel.

b)

Most az $y = 100$ érték adott. A $100 = 120 + 10 \cdot \lg x$ egyenletből kell x -et meghatározni.

$$\begin{array}{ll} 100 = 120 + 10 \cdot \lg x & \text{Mindkét oldalból elveszünk 120-at.} \\ -20 = 10 \cdot \lg x & \text{Mindkét oldalt elosztjuk 10-zel.} \\ -2 = \lg x & \text{A logaritmus definícióját használjuk.} \\ 10^{-2} = x & \end{array}$$

Azaz a hangforrás intenzitása $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01 \frac{W}{m^2}$.

4. A Föld különböző növényzetű övezeteit vizsgálva a kutatók arra a megállapításra jutottak, hogy az éves csapadékmennyiség és a termelődött új hajtások mennyisége között a $\lg T = 0,8 \cdot \lg C + 1,2$ tapasztalati összefüggés állítható fel, ahol T a termékenység (szárazanyag-tartalomra számítva, $g/m^2/év$ egységben), C pedig az éves csapadékmennyiség (cm-ben). Mekkora termékenységűek az évi 1 méteres csapadékú övezetek? (Ilyenek a mérsékelt égövi füves területek.)

Megoldás:

A $\lg T = 0,8 \cdot \lg C + 1,2$ összefüggésben most a C helyére 100 kerül, hiszen az éves csapadékmennyiség 1 méter, azaz 100 cm.

Így a $\lg T = 0,8 \cdot \lg 100 + 1,2$ egyenletet kell megoldanunk.

$$\lg T = 0,8 \cdot \lg 100 + 1,2$$

$$\lg T = 0,8 \cdot 2 + 1,2$$

$$\lg T = 1,6 + 1,2$$

$$\lg T = 2,8$$

$$T = 10^{2,8} \approx 631 \text{ g/m}^2/\text{év a termékenység.}$$

Gyakorló feladatok

1. Egy nyári napon az aszfalt hőmérséklete jó közelítéssel megadható a $T = 22 \cdot 10^{\frac{t}{34}}$ képlettel, ahol t a 0 órától eltelt időt jelenti órában mérve, T pedig a hőmérsékletet °C-ban.
 - a) Mennyi volt az aszfalt hőmérséklete reggel 8 órakor?
 - b) Mikor érte el az aszfalt hőmérséklete a 60 °C-ot?
2. A matematikai információelméletben az n betűs ábécéből alkotott m számú karakterből álló információmennyiséget (amelynek mértékegysége a bit) a $H = m \cdot \log_2 n$ képlettel definiálták. (Ez a Hartley-képlet.) Például a 26 betűből álló angol ábécében a *London* szó hírértéke $6 \cdot \log_2 26 \approx 28$ bit.
 - a) Hány bit információt képvisel az angol ábécében a *CHICAGO* szó?
 - b) Milyen hosszú az angol ábécében az a szó, amelynek hírértéke 47 bit.
 - c) Hány betűs ábécé esetén lenne egy 10 karakterből álló hír információs értéke 50 bit?