

KOORDINÁTA-GEOMETRIA

Vektorok

1. Adottak az alábbi vektorok: $\mathbf{a}(5; 12)$, $\mathbf{b}(-4; 3)$ és $\mathbf{c}(7; -2)$. Határozzuk meg a következő vektorok koordinátáit, illetőleg adjuk meg a keresett értéket!

$$\begin{array}{ccccccc}
 |\mathbf{a}| & |\mathbf{b}| & |\mathbf{c}| & 3\mathbf{a} & \frac{1}{2}\mathbf{b} & -\mathbf{b} & -2\mathbf{c} \\
 \\
 \mathbf{a} + \mathbf{b} & & \mathbf{b} + \mathbf{c} & & 2\mathbf{c} + \mathbf{a} & & \mathbf{c} - \mathbf{b} + 3\mathbf{a} & & \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c} \\
 \\
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} & (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} & & (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) & & & & \\
 \\
 \mathbf{a}_{+90^\circ} & \mathbf{a}_{-90^\circ} & \mathbf{b}_{+90^\circ} & \mathbf{b}_{-90^\circ} & \mathbf{c}_{+90^\circ} & \mathbf{c}_{-90^\circ} & & &
 \end{array}$$

2. Határozzuk meg a következő vektorok hajlásszögét!

$$\mathbf{a}(5; 12) \text{ és } \mathbf{b}(-4; 3) \qquad \mathbf{a}(6; -8) \text{ és } \mathbf{b}(-4; 3) \qquad \mathbf{a}(1; -7) \text{ és } \mathbf{b}(5; 9)$$

3. Számítsuk ki az alábbi pontok által meghatározott szakaszok hosszát!

$$A(2; 7) \text{ és } B(5; 11) \qquad A(4; -1) \text{ és } B(2; 3)$$

4. Adott az $A(5; -3)$, $B(1; 4)$, $C(-7; 1)$ csúcspontú háromszög. Határozzuk meg a háromszög területét, területét!
5. Az $A(-3; 1)$ és $B(5; 3)$ pontok által meghatározott szakaszt mindkét irányban meghosszabbítjuk az AB szakasz hosszával. Határozzuk meg az így kapott szakasz végpontjait!
6. Egy paralelogrammának három csúcspontját ismerjük: $A(-2; -1)$, $B(2; 5)$, $C(7; 1)$. Határozzuk meg a negyedik csúcspont koordinátáit!
7. Egy paralelogramma két csúcsának koordinátái: $(7; -1)$ és $(0; 3)$; középpontjéé $(3; 6)$. Számítsuk ki a paralelogramma másik két csúcsának a koordinátáit, az oldalak és az átlók hosszát!
8. Az $\mathbf{a}(6; -2)$ és a $\mathbf{b}(x; 15)$ vektorok merőlegesek egymásra. Határozzuk meg az x értékét!
9. Határozzuk meg az $A(5; 4)$, $B(-3; 2)$ pontok által meghatározott szakasz felezőpontjának koordinátáit!
10. Paralelogramma-e az $A(-4; 1)$, $B(-3; -5)$, $C(6; -2)$, $D(5; 4)$ pontok által meghatározott négyszög?
11. Írjuk fel az $A(1; 8)$ és $B(7; -1)$ pontok által meghatározott szakasz harmadoló pontjainak koordinátáit!
12. Milyen arányban osztja a $P(3; 4)$ pont az AB szakaszt, ahol $A(5; 6)$ és $B(0; 1)$?
13. Számítsuk ki az $A(5; -3)$, $B(-7; -5)$, $C(-1; 4)$ csúcspontú háromszög súlypontjának koordinátáit!
14. Az ABC háromszög két csúcspontját és a súlypontját ismerjük. Ezek pedig az alábbiak: $A(-7; 2)$, $B(5; 7)$, $S(0; 2)$. Számítsuk ki a harmadik csúcspont koordinátáit!
15. Adott az $A(5; -3)$, $B(1; 4)$, $C(-7; 1)$ csúcspontú háromszög. Számítsuk ki a súlyvonalainak hosszát, és számítsuk ki súlypontjának koordinátáit!

Az egyenes

16. Egy egyenes két pontja $A(-3; 2)$ és $B(1; 5)$. Adjuk meg az egyenes egy irányvektorát, egy normálvektorát, az iránytangensét és az irányszögét!
17. Töltsük ki a táblázat hiányzó mezőit!

Egyenes	$\mathbf{n}(A; B)$	$\mathbf{v}(v_1; v_2)$	m	φ
e	$(5; -3)$			
f		$(-7; 1)$		
g			2	
h				45°

18. Adott négy egyenes egy-egy jellemző paraméterével. Vizsgáljuk meg, milyen az egymáshoz viszonyított helyzetük!

$$\mathbf{n}(5; -1) \quad \mathbf{v}'(8; 2) \quad \varphi'' = 168,69^\circ \quad m''' = 0,25$$

19. Írjuk fel az adott ponton átmenő, adott normálvektorú egyenesek egyenletét!

$$P_0(5; 3) \quad \mathbf{n}(-3; 2) \quad P_0(-7; 1) \quad \mathbf{n}(-3; -5) \quad P_0(8; -6) \quad \mathbf{n}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$$

20. Írjuk fel az $A(-4; 2)$ és $B(6; -4)$ pontok által meghatározott szakasz felezőmerőlegesének egyenletét!
21. Illeszkednek-e a $P(2; -5)$ és a $Q(1; 3)$ pontok a $e: 3x - 2y = 16$ egyenletű egyenesre?
22. Egy egyenes egyenlete $5x - y = 1$. Adjuk meg az egyenes egy normálvektorát, egy irányvektorát, az iránytangensét, az irányszögét, és adjunk meg az egyenesről két pontot! Ábrázoljuk is az egyenest!
23. Írjuk fel adott ponton átmenő, adott irányvektorú egyenesek egyenletét!

$$P_0(3; 1) \quad \mathbf{v}(5; 2) \quad P_0(-4; 2) \quad \mathbf{v}(-3; 7) \quad P_0\left(1; -\frac{1}{2}\right) \quad \mathbf{v}(4; -5)$$

24. Írjuk fel a $P(-3; -1)$ és $Q(7; 3)$ pontokra illeszkedő egyenes egyenletét!
25. Egy egyenesre illeszkednek-e az $A(-4; 3)$, $B(-1; 2)$, $C(5; 0)$ pontok?
26. Adott két egyenes: $e: 3x + 2y = 5$ és $f: 2x - y = 6$. Mekkora szöget zár be a két egyenes?
27. Írjuk fel adott ponton átmenő, adott iránytangensű vagy irányszögű egyenes egyenletét!

$$P_0(3; -4) \quad m = 2 \quad P_0(3; -4) \quad m = 2 \quad P_0(3; -4) \quad m = 2$$

$$P_0(2; 5) \quad m = 0,67 \quad P_0(3; 4) \quad \varphi = 45^\circ \quad P_0\left(5; \frac{1}{2}\right) \quad \varphi = 64,47^\circ$$

28. Írjuk fel a $P_0(6; -3)$ ponton átmenő és a $P(-1; 4)$, $Q(2; 5)$ pontokat összekötő egyenessel párhuzamos és arra merőleges egyenes egyenletét!
29. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(-4; 1)$ ponton és párhuzamos a $2x + 3y = -4$ egyenletű egyenessel!

30. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az origón és merőleges a

$$3x + y - \frac{1}{2} = 0 \text{ egyenletű egyenesre!}$$

31. Egy háromszög csúcsainak koordinátái $A(-4; 1)$, $B(2; -1)$, $C(0; 5)$.

- a) Írjuk fel az oldalegyenesek egyenletét!
- b) Írjuk fel az oldalfelező merőlegesek egyenletét!
- c) Írjuk fel a súlyvonalak egyenletét!
- d) Írjuk fel a magasságvonalak egyenletét!
- e) Írjuk fel a középvonalak egyenletét!

32. Határozzuk meg a következő egyenesek metszéspontjának koordinátáit!

- a) $e: 2x - 3y - 12 = 0$ $f: 5x + 4y - 7 = 0$
- b) $e: 3x + y = 8$ $f: y = 2 - 3x$
- c) $e: 4x - 2y = 6$ $f: 2x - 3 = y$

33. Számítsuk ki a $P(4; -2)$ pontnak az $e: 2x + 3y - 28 = 0$ egyenletű egyenestől mért távolságát!

34. Két párhuzamos egyenes egyenlete: $e: 3x + 4y = -4$ és $f: 3x + 4y = 21$. Számítsuk ki a két egyenes távolságát!

35. Egy háromszög három oldalegyenesének egyenlete: $a: x - y + 5 = 0$. $b: x + 4y = 0$, $c: 2x + y - 14 = 0$.

- a) Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit!
- b) Adjuk meg a súlypont koordinátáit!
- c) Adjuk meg a háromszög köré írható köre középpontjának koordinátáit!
- d) Adjuk meg a háromszög magasságpontjának koordinátáit!
- e) Vizsgáljuk meg, hogy a súlypont, a köré írható kör középpontja és a magasságpont egy egyenesre esik-e!

A kör

36. Írjuk fel az alábbi körök egyenletét!

$C(2; 3)$	$r = 5$	$C(-1; 4)$	$r = 3$	$C(-8; -7)$	$r = \sqrt{2}$
$C(3; 0)$	$r = 6$	$C(0; -6)$	$r = 2$	$C(0; 0)$	$r = 1$

37. Az alábbi körök egyenletéből olvassuk le a középpont koordinátáit és a sugár nagyságát!

$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 49$	$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$
$(x + 1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = 20$	$x^2 + (y + 1)^2 = 3$

38. Vizsgáljuk meg, hogy az $A(5; 2)$ és a $B(-1; 7)$ pontok illeszkednek-e az $(x - 7)^2 + (y + 3)^2 = 29$ egyenletű körre!

39. Adjunk meg a következő körökről egy-egy pontot a koordinátaikkal!

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25 \qquad x^2 + (y-5)^2 = 4 \qquad (x+1)^2 + y^2 = 3$$

40. Döntsük el az alábbi másodfokú kétismeretlenes egyenletekről, hogy kör egyenletek-e!

$$\begin{array}{ll} x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0 & x^2 + y^2 + 2xy + 5x - 3y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x + 6y + 35 = 0 & -2x^2 - 2y^2 + 4x + 8y + 22 = 0 \end{array}$$

41. Egy kör átmérőjének végpontjai $A(-6; -3)$, $B(4; 5)$. Írjuk fel a kör egyenletét!

42. Adott a $P(-3; 1)$, $Q(1; -7)$, $R(6; -2)$ pont. Írjuk fel a három pontra illeszkedő kör egyenletét!

43. Az $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 50$ egyenletű körhöz képest milyen helyzetűek az alábbi egyenesek?

$$e: 7x + y + 13 = 0 \qquad f: 3x - 4y - 32 = 0 \qquad g: 2x - y + 9 = 0$$

44. Az $(x-5)^2 + (y-12)^2 = 169$ egyenletű körhöz a $P(10; 24)$ pontjában érintőt húzunk. Írja fel az érintő egyenletét!

45. Milyen hosszúságú húr vág ki az $y = 2x + 1$ egyenletű egyenesből az $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ egyenletű kör?

46. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjai $A(-3; 5)$ és $B(3; -1)$. A háromszög köré írt kör egyenlete: $x^2 + y^2 - 4,5x - 8,5y - 5 = 0$. Számítsa ki a harmadik csúcs pont koordinátáit! Hány megoldás van?

47. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög derékszögű csúcsának koordinátái $C(7; 7)$, az átfogó egyenesének egyenlete $4x + 3y = 24$. Számítsa ki az átfogó végpontjainak koordinátáit!

48. Keresse meg az abszcisszatengelynek azt a pontját, amelyből az $A(0; -3)$ és a $B(6; 5)$ pontok által meghatározott szakasz derékszögben látszik!

49. Írja fel annak a két egyenesnek az egyenletét, amelyek párhuzamosak a $3x - 4y = 0$ egyenletű egyenessel, és érintik az $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ kört!

50. Számítsa ki a következő egyenletekkel magadott körök metszéspontjainak koordinátáit!

$$k_1: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 25 \qquad k_2: (x-4)^2 + (y+1)^2 = 25$$

51. Írjuk fel a $P(-4; 5)$ pontból a $k: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 50$ körhöz húzható érintők egyenletét!