

HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

Ismétlés - 11. évfolyam

Elméleti összefoglaló

Hatványozás

Definíciók

Természetes kitevő	Negatív egész kitevő	Törtkitevő
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ darab}}$ $a^1 = a$ $a^0 = 1, \text{ ha } a \neq 0$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a \neq 0$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $a > 0$

Azonosságok (a változók lehetséges értékeinél)

$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
---------------------------	-----------------------------	---------------------------	---------------------------------	--

Gyökvonás

Definíciók

Páros gyökkitevő	Páratlan gyökkitevő
$(\sqrt[n]{a})^n = a $	$(\sqrt[n]{a})^n = a$

Azonosságok (a változók lehetséges értékeinél)

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
---	---	-----------------------------------	---

Logaritmus

Definíció

$a^{\log_a b} = b$ $a > 0, a \neq 1, b > 0$	$\log_a a^k = k$ $a > 0, a \neq 1$
--	---------------------------------------

Azonosságok (a változók lehetséges értékeinél)

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$		$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$	$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{\log_a x}{n}$	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Feladatok**1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!**

<i>Kidolgozott példa</i> $\frac{1}{49} \cdot \sqrt{7^x} = \sqrt[3]{7^4}$ Átírunk mindent 7-hatványra. $7^{-2} \cdot 7^{\frac{x}{2}} = 7^{\frac{4}{3}}$ Az azonos alapú hatványok szorzatára vonatkozó azonosság szerint: $7^{-2+\frac{x}{2}} = 7^{\frac{4}{3}}$ Mivel $x \mapsto 7^x$ szigorúan monoton: $-2 + \frac{x}{2} = \frac{4}{3}$ $-12 + 3x = 8$ $3x = 20$ $x = \frac{20}{3}$ Ellenőrzés, válasz.	<i>Órai feladat</i> $\frac{\sqrt{125^x}}{25} = \frac{1}{5^x}$ <i>Házi feladat</i> $\frac{1}{27} = \frac{\sqrt{3^{x+1}}}{9^{-1}}$ <i>Gyakorló feladat</i> $\sqrt{2} = \frac{32^x}{\sqrt[3]{4}}$
---	---

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

<i>Kidolgozott példa</i> $6 \cdot 2^{x-1} + 2^{x+3} = 44$ A hatványozás azonosságait használva átírjuk az egyenlet megfelelő tagjait: $6 \cdot \frac{2^x}{2} + 2^x \cdot 2^3 = 44$ Érdemes bevezetni új ismeretlent: $a := 2^x$. $6 \cdot \frac{a}{2} + a \cdot 2^3 = 44$ $3a + 8a = 44$ $11a = 44$ $a = 4$ Ezt visszaírjuk: $2^x = 4$ $2^x = 2^2$ Mivel $x \mapsto 2^x$ szigorúan monoton: $x = 2$ Ellenőrzés, válasz.	<i>Órai feladat</i> $2 \cdot 3^{x-1} + 3^{x+3} = 83$ <i>Házi feladat</i> $5^{x+4} - 5^{x+2} = 24$ <i>Gyakorló feladat</i> $10 \cdot 4^{x-2} + 54 = 4^{x+1}$
---	--

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

<i>Kidolgozott példa</i> $3^{2x-1} + 3^{x+1} = 12$ A hatványozás azonosságainak segítségével átalakítjuk a tagokat: $\frac{3^{2x}}{3} + 3^x \cdot 3 = 12$ $\frac{(3^x)^2}{3} + 3 \cdot 3^x = 12$ Érdemes új ismeretlent behozni: $a := 3^x$. $\frac{a^2}{3} + 3a = 12$ $a^2 + 9a - 36 = 0$ $a_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}}{2} = \frac{-9 \pm 15}{2}$ $a_1 = -12 \quad a_2 = 3$ Visszahelyettesítünk: $3^x = -12$ Ez az egyenlet nem oldható meg, mert $3^x > 0$. A másik lehetőség: $3^x = 3$ Mivel az $x \mapsto 3^x$ szigorúan monoton: $x = 1$ Ellenőrzés, válasz.	<i>Órai feladat</i> $25^x - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$ <i>Házi feladat</i> $16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0$ <i>Gyakorló feladat</i> $5 \cdot 4^x - 2^{x+1} = 3$
---	--

4. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

<i>Kidolgozott példa</i> $25^{x-5} > \frac{1}{125}$ Mindkét oldalt 5 hatványaként írjuk fel: $(5^2)^{x-5} > 5^{-3}$ $5^{2x-10} > 5^{-3}$ Mivel az $x \mapsto 5^x$ szigorúan monoton növekedő, ezért a reláció a kitevőkre is megmarad: $2x - 10 > -3$ $x > \frac{7}{2}$ Próba, válasz.	<i>Órai feladat</i> $3^{4x-5} < 27^x$ <i>Házi feladat</i> $\sqrt[4]{7^{3x+1}} \leq \sqrt[3]{49}$ <i>Gyakorló feladat</i> $\sqrt{2^{3x-1}} \geq \frac{1}{512}$
---	--

5. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

<i>Kidolgozott példa</i> $\begin{cases} 5^x + 2^{y+1} = 29 \\ 2 \cdot 5^x - 11 \cdot 2^y = 28 \end{cases}$ Alakítsuk át az első egyenletet: $5^x + 2 \cdot 2^y = 29$ Érdemes új ismeretleneket behozni: $a := 5^x, b := 2^y$. Ekkor az eredeti egyenletrendszer átírható: $\begin{cases} a + 2b = 29 \\ 2a - 11b = 28 \end{cases}$ Fejezzük ki az első egyenletből a-t: $a = 29 - 2b$. És ezt most írjuk be a második egyenletbe a helyére. $2 \cdot (29 - 2b) - 11b = 28$ $58 - 4b - 11b = 28$	<i>Órai feladat</i> $\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 5 \cdot 2^x - 3 \cdot 3^y = 11 \end{cases}$ <i>Házi feladat</i> $\begin{cases} 7^x + 5 \cdot 2^y = 41 \\ 5 \cdot 7^x + 3 \cdot 2^y = 29 \end{cases}$ <i>Gyakorló feladat</i> $\begin{cases} 10^{x+y} = 1000 \\ 10^x - 2 \cdot 10^y = 80 \end{cases}$
--	---

$30 = 15b$ $b = 2$ $a = 29 - 2 \cdot 2 = 25$ Innen a visszahelyettesítés után: $5^x = 25 \text{ és így } x = 2,$ $2^y = 2 \text{ és így } y = 1.$ Ellenőrzés. Így az egyenletrendszer megoldása a $(2; 1)$ számpár.	
---	--

6. Adjuk meg a következő kifejezés pontos értékét!

<i>Kidolgozott példa</i> $\lg \frac{1000 \cdot \sqrt{10}}{100^{-1}}$ Mindent 10-hatványként írunk fel (hiszen a logaritmus alapszáma is 10). $\lg \frac{10^3 \cdot 10^{\frac{1}{2}}}{(10^2)^{-1}}$ Ezek után a hatványozás azonosságainak segítségével a törtet átalakítjuk. $\lg \frac{10^{3+\frac{1}{2}}}{10^{-2}} = \lg 10^{\frac{7}{2}-(-2)} = \lg 10^{\frac{11}{2}} = \frac{11}{2}$ A végén a logaritmus definícióját használtuk, amely szerint $\log_a a^k = k$.	<i>Órai feladat</i> $\log_5 \frac{5^{-1} \cdot \sqrt{125}}{25^2}$ <i>Házi feladat</i> $\log_4 \frac{4^{-3} \cdot \sqrt[3]{16}}{64^5}$ <i>Gyakorló feladat</i> $\log_3 \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{1}{27}}{9^{-3}}$
---	--

7. Adjuk meg a következő kifejezés pontos értékét!

<i>Kidolgozott példa</i> $\log_m \frac{\sqrt{m} \cdot (m^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{z}}{(m \cdot z)^{-1}}$ Átalakítjuk a törtet: $\log_m \frac{m^{\frac{1}{2}} \cdot m^{-2} \cdot z^{-1}}{m^{-1} \cdot z^{-1}} = \log_m \frac{m^{0,5-2}}{m^{-1}} = \log_m m^{-1,5-(-1)} =$ $= \log_m m^{-0,5} = -0,5 = -\frac{1}{2}$	<i>Órai feladat</i> $\log_a \frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}}{a^{-1} \cdot a^3}$ <i>Házi feladat</i> $\log_x \frac{x^{-2} \cdot \sqrt{x}}{\frac{1}{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}}$ <i>Gyakorló feladat</i> $\log_y \frac{(y \cdot \sqrt{y})^{-2}}{\frac{1}{y^2} \cdot \sqrt[3]{y}}$
--	--

8. Adjuk meg a következő kifejezés pontos értékét!

<i>Kidolgozott példa</i> $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 3} + 4^{1-\log_{16} 9} - 2 \cdot 8^{\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$ Nézzük a tagokat külön-külön! $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 3} = (2^{-1})^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^{-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ $4^{1-\log_{16} 9} = \frac{4^1}{4^{\log_{16} 9}} = \frac{4}{(\sqrt{16})^{\log_{16} 9}} = \frac{4}{\sqrt{16}^{\log_{16} 9}} = \frac{4}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$ $2 \cdot 8^{\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{3}}} = 2 \cdot (2^3)^{\log_2 3^{-\frac{1}{3}}} = 2 \cdot (2^{\log_2 3^{-\frac{1}{3}}})^3 =$ $= 2 \cdot (3^{-\frac{1}{3}})^3 = 2 \cdot 3^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ Így a három tag együtt: $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$ Felhasználtuk a logaritmus definícióját: $a^{\log_a b} = b$.	<i>Órai feladatok</i> $4^{2+\log_4 2}$ $5^{1-\log_5 3}$ $7^{\log_{49} 9}$ $81^{\log_9 2}$ $\left(\frac{1}{16}\right)^{\log_2 3}$ <i>Házi és gyakorló feladatok</i> $7^{1+\log_7 2}$ $3^{1-\log_3 2}$ $5^{\log_{25} 16}$ $16^{\log_4 3}$ $\left(\frac{1}{125}\right)^{\log_5 4}$
--	---

9. Adjuk meg a következő kifejezés pontos értékét!

Kidolgozott példa

$$\log_5 15 + 2 + \log_5 \sqrt{63} - \log_5 126 + \frac{1}{2} \log_5 28$$

A logaritmus definícióját és azonosságait használjuk fel.

$$\begin{aligned} & \log_5 15 + \log_5 5^2 + \log_5 \sqrt{63} - \log_5 126 + \log_5 28^{\frac{1}{2}} = \\ & = \log_5 \frac{15 \cdot 5^2 \cdot \sqrt{63} \cdot \sqrt{28}}{126} = \log_5 \frac{3 \cdot 5 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7} \cdot 2 \cdot \sqrt{7}}{2 \cdot 3^2 \cdot 7} = \\ & = \log_5 5^3 = 3 \end{aligned}$$

Órai feladat

$$5 \cdot \log_6 12 - 2 \cdot \log_6 9 - 4 \cdot \log_6 4 - \log_6 2$$

Házi feladat

$$4 \log_3 18 - 3 \log_3 36 + \log_3 256 + 2 \log_3 72 - 4 \log_3 24$$

Gyakorló feladat

$$6 \log_5 6 - \log_5 32 + 2 \log_5 10 - 3 \log_5 9 - \log_5 200$$

10. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

Kidolgozott példa

$$\log_3(2x - 5) + \log_3 2 = \log_3(x + 2)$$

Kikötések: $x > \frac{5}{2}$ és $x > -2$, azaz $\boxed{x > \frac{5}{2}}$

A szorzat logaritmusára vonatkozó azonosságot használjuk:

$$\log_3(2x - 5) \cdot 2 = \log_3(x + 2)$$

Mivel az $x \mapsto \log_3 x$ függvény szigorúan monoton, ezért:

$$2 \cdot (2x - 5) = x + 2$$

Órai feladat

$$\log_2(x + 1) + \log_2 3 = \log_2 24$$

Házi feladat

$$\lg(x - 8) - \lg(3x - 4) = \lg(x - 5)$$

Gyakorló feladat

$$\lg(x - 3) + \lg(x + 5) = \lg(2x + 1)$$

$4x - 10 = x + 2$ $x = 4$ Ez a kikötésnek megfelel. Ellenőrzés, válasz.	
---	--

11. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

<i>Kidolgozott példa</i> $\frac{\lg(3x - 4)}{\lg(x + 6)} = 1$ Kikötések: $\boxed{x > \frac{4}{3}}, x > -6 \text{ és } x + 6 \neq 1, \text{ azaz } x \neq -5$ $\lg(3x - 4) = \lg(x + 6)$ A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $3x - 4 = x + 6$ $x = 5$ Ez a kikötésnek és az ellenőrzésnek is megfelel.	<i>Órai feladat</i> $\frac{\log_4(3x + 5)}{\log_4(7x - 1)} = 1$ <i>Házi feladat</i> $\frac{\log_7(5x + 11)}{\log_7(2x - 1)} = 1$ <i>Gyakorló feladat</i> $\frac{\log_2(x^2 - 2x - 15)}{\log_2(2x - 3)} = 1$
--	--

12. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

<i>Kidolgozott példa</i> $\log_{\frac{1}{2}}(15 - x) > -3$ Kikötés: $15 > x$. A logaritmus definícióját használjuk: $\log_{\frac{1}{2}}(15 - x) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ Mivel az $\mapsto \log_{\frac{1}{2}}x$ függvény szigorúan monoton csökkenő (hiszen a logaritmus alapszáma 0 és 1 között van), ezért a reláció megfordul: $15 - x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ $15 - x < 8$ $7 < x$ Ezt összevetjük a kikötéssel, így a megoldáshalmaz: $]7; 15[$. Próba.	<i>Órai feladat</i> $\log_4(2x - 1) \leq \frac{1}{2}$ <i>Házi feladat</i> $\log_{\frac{1}{3}}(2 - x) > -1$ <i>Gyakorló feladat</i> $\lg(7 + 3x) \leq 2$
---	--

13. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

<i>Kidolgozott példa</i> $\begin{cases} \lg x + \lg y = 3 \\ 2 \cdot \lg x - 3 \lg y = 1 \end{cases}$ Kikötések: $x > 0$ és $y > 0$. Vezessünk be új ismeretleneket: $a := \lg x, b := \lg y$. Ekkor az eredeti egyenletrendszer: $\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a - 3b = 1 \end{cases}$ Az első egyenletből kifejezzük b-t: $b = 3 - a$. Ezt beírjuk a második egyenletbe: $2a - 3 \cdot (3 - a) = 1$ $2a - 9 + 3a = 1$ $5a = 10$ $a = 2$ $b = 3 - 2 = 1$ Innen: $\lg x = 2$, azaz $x = 100$, $\lg y = 1$, azaz $y = 10$. (A logaritmus definíciója miatt.) Ellenőrzés. Tehát az egyenletrendszer megoldása a $(100; 10)$ valós számpár.	<i>Órai feladat</i> $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 6 \\ 2 \log_2 x + 3 \log_2 y = 32 \end{cases}$ <i>Házi feladat</i> $\begin{cases} \log_3 x + 2 \log_3 y = 8 \\ \log_3 x - \log_3 y = 2 \end{cases}$ <i>Gyakorló feladat</i> $\begin{cases} \lg(x \cdot y) = 1 \\ 2 \lg x - \lg y = 5 \end{cases}$
---	---